

В самом деле, для функции (14) имеем

$$L[\bar{y}(x)] = f(x) + \lambda' u^{(0)}(x) + \lambda' \sum_{k=1}^q A_k u_k(x),$$

$$F[\bar{y}(x)] = \psi(x) + \lambda' \int_a^b N(x, t) u^{(0)}(t) dt + \sum_{k=1}^q A_k u_k(x) \equiv \\ \equiv u^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^q A_k u_k(x).$$

Отсюда и из равенств (1) и (3) следует тождество

$$L[\bar{y}(x)] = f(x) + \lambda' \int_a^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}(x, t) \bar{y}^{(\alpha)}(t) dt.$$

Решение (14) удовлетворяет начальным условиям (2) и имеет место лишь в том случае, когда системы (5) и (13) совместны. Таким образом доказана теорема 3.

Теорема 4. Если $\lambda = \lambda'$, то задача Коши для уравнения (1) при произвольных начальных условиях (2) является разрешимой, если системы (5) и (14) разрешимы совместно. В случае совместности этих систем решение определяется формулой (14) и зависит от $n + q - r$ произвольных параметров, где r есть ранг матрицы системы (13).

Замечание. Поскольку собственные числа интегро-дифференциального уравнения (10) совпадают с собственными числами ядра N уравнения (7), то спектр собственных значений уравнения (10) есть дискретное множество без точек сгущения на конечном расстоянии.

§ 2

1. Пусть $m > n$ ($m = n + p$). Мы предположим теперь, что функции $K_i(x, t)$ вместе с их производными по x до порядка p включительно регулярны в области $a \leq x, t \leq b$, а $f(x)$ и ее p последовательные производные кусочно непрерывны в промежутке (a, b) .

Наряду с уравнением (1) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L[y(x)] = f(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k (x - x_0)^k + \lambda \int_{x_0}^x \frac{(x - \eta)^{p-1}}{(p-1)!} \Phi[y(\eta)] d\eta, \quad (15)$$

где A_k — произвольная постоянная, а Φ есть интегро-дифференциальный оператор

$$\int_a^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}^{(p)}(x, t) y^{(\alpha)}(t) dt,$$

причем символ $K_{\alpha}^{(p)}$ означает производную по x p -го порядка. Если постоянные A_k подчинить условиям

$$A_k = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}^{(k)}(x_0, t) y^{(\alpha)}(t) dt, \quad (16)$$

то, нетрудно проверить, что уравнения (1) и (15) будут эквивалентны. Будем поэтому рассматривать уравнение (15) с начальными условиями (2).